Área de Publicação: Matemática

UMA MANEIRA SIMPLES DE DETERMINAR TODOS OS TERNOS PITAGÓRICOS

SILVA, Rodrigo M. F. da[1]; SILVA, Lucas da[2] ; FILHO, Daniel Cordeiro de Morais[2]

[1]UFCG/CCT/UAMAT/Voluntário PET- Matemática UFCG/FNDE – e-mail:rodriigosilv@gmail.com:
[2] UFCG/CCT/UAMAT/Bolsista PET- Matemática UFCG/FNDE – e-mail: lucastri09@gmail.com
[3] UFCG/CCT/UAMAT/ Professor UAMAT, Tutor PET-Matemática – UFCG/FNDE

RESUMO

Há diversos problemas na matemática que instigam a curiosidade humana. Um deles foi a indagação de como se relacionava os lados de um triângulo retângulo, sendo a solução exibida através do Teorema de Pitágoras. Ainda investigando os lados dos triângulos retângulos, os Babilônicos registraram na tabela de argila Pimpliton 322, vide [1], os números inteiros que eram lados do triângulo retângulo. Nesse trabalho, é exibido um método de caracterizar todos os números inteiros que podem ser lados de um triângulo retângulo. Tal trabalho foi fundamentado a partir de uma atividade do grupo PET matemática da UFCG, na qual lemos textos em língua estrangeira. Nosso texto em destaque é o capítulo “The Method of Diophantus” da referência [2]. O método empregado é o Método de Diofanto que utiliza a geometria analítica, evidenciando, assim, a ideia geométrica de Diofanto.

PALAVRAS-CHAVE: Ternas Pitagóricas. Diofanto. Geometria

1. INTRODUÇÃO

Segundo [1], “Um dos problemas que está fortemente ligado ao Teorema de Pitágoras é o de encontrar inteiros positivos que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo[...]”, ou seja, inteiros positivos a, b e c com $a < b < c$ que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$. Os ternos de inteiros positivos que cumprem essa condição são chamados ternos Pitagóricos.

Sabe-se que os babilônicos conheciam o teorema de Pitágoras, mas, será que também conheciam os ternos pitagóricos, tendo em vista que os ternos pitagóricos estão ligados ao teorema de Pitágoras? Há fortes evidências acerca não só desse conhecimento, mas também, da descoberta de ternos pitagóricos pelos babilônicos. Este fato, encontra-se na Plimpton 322, que é uma tabela de argila em escrita cuneiforme datada por volta do século XVIII a. C., veja [1]. Diante disso, neste trabalho abordaremos um resultado que ficou conhecido como “O método de Diofanto”, vide [2]. Além de ser elegante, esse método nos fornece uma forma de encontrar todos os ternos pitagóricos. Além disso, Diofanto faz uma bela abordagem do resultado por meio da geometria.

2. METODOLOGIA

Este trabalho provém da atividade "Leitura de textos em língua estrangeira" do PET – MATEMÁTICA da UFCG e o texto em questão foi o capítulo "The Method of Diophantus" da referência [2]. Além disso, este trabalho foi discutido e aperfeiçoado em outra atividade do mesmo PET, chamado Workshop Didático Pedagógico.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

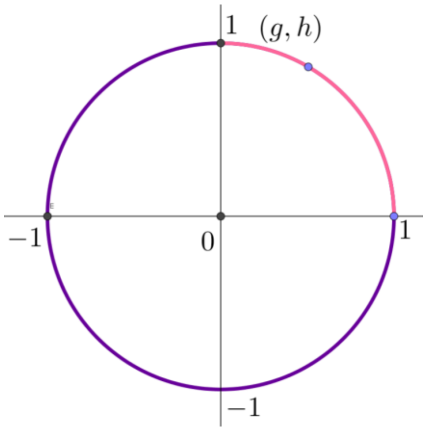
Iniciaremos os resultados com a definição de ternos semelhantes, mostraremos alguns lemas que localizarão os ternos pitagóricos em uma circunferência de raio unitário e, por fim, provaremos o Método de Diofanto.

Dizemos que $(a,\ b,\ c)$ e $(d,\ e,\ f\ )$ são semelhantes, se existem inteiros positivos l e m tais que $\mathrm{l}\cdot\mathrm{d}\ = \mathrm{a}\cdot m, l\cdot e = m\cdot b$ e $l\cdot f\ = m\cdot c$. Por exemplo, os ternos (3, 4, 5) e (6, 8, 10) são semelhantes. De fato, pois se tomarmos $l = 1$ e $m\ =\ 2$, obteremos $2\cdot 3 = 1\cdot 6{,}2\cdot 4 = 1\cdot 8$ e $2\cdot 5 = 1\cdot 10$.

Observemos que se $(a,\ b,\ c)$ é um terno pitagórico, então esses números satisfazem

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad \text{(I)}$$

Figura 1: Localização dos ternos pitagóricos no círculo unitário centrado na origem

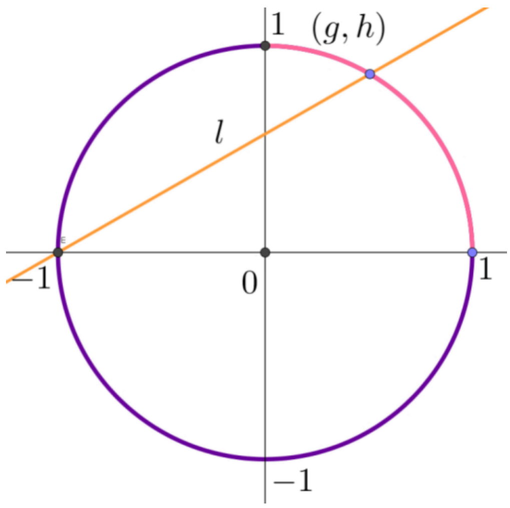


Relembramos que o gráfico da equação $x^2 + y^2 = 1$ é uma circunferência de raio 1 e centro na origem. Assim, pela equação (I), um terno pitagórico pode ser identificado como um ponto no plano cartesiano de coordenadas racionais que está no primeiro quadrante desta circunferência. Observemos, a seguir, algumas propriedades desses pontos que estão no primeiro quadrante, onde estão demostradas em [2].

Lema 1: Sejam (g, h) um ponto sobre o círculo unitário diferente do ponto $(-1, 0)$ e l a reta que une esses dois pontos. Então l tem como equação $y = t(x+1)$, onde

$$t = \frac{h}{g+1}, \quad g = \frac{1-t^2}{1+t^2} \; e \; h = \frac{2t}{1+t^2} \; .$$

Figura 2: Reta l formada pelo ponto $(-1, 0)$ e (g, h).



Lema 2: Seja (g, h) um ponto sobre o círculo unitário diferente do ponto $(-1, 0)$. Se t é a inclinação da reta que une esses dois pontos, então t é um número racional se, e somente se, (g, h) é um ponto racional.

Lema 3: Se (a, b, c) é um terno pitagórico, então o ponto $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ é um ponto racional no arco de um círculo de raio unitário do primeiro quadrante onde $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. Mais especificamente,

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

onde, $\sqrt{2} - 1 < t < 1$.

Esses três lemas nos dão toda a base necessária para demonstrar o Método de Diofanto. Seguem abaixo o enunciado e, depois, a demonstração do resultado.

Teorema (Método de Diofanto): Todo terno pitagórico (a, b, c) é semelhante a um terno pitagórico da forma

$$(q^2 - p^2, \; 2pq, \; q^2 + p^2) \quad \text{(II)}$$

onde $q > p$ são inteiros positivos tais que $\sqrt{2} - 1 < \frac{p}{q} < 1$.

Demonstração:

Notemos que, se (a, b, c) é um terno pitagórico, então ele está relacionado com o ponto de coordenadas racionais $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$. Além disso, sendo t a inclinação da reta l definida por $(-1,\ 0)$ e $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, então pelo Lema 3, segue que

$$\frac{a}{c} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

e

$$\frac{b}{c} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

onde $\sqrt{2} - 1 < t < 1$. Pelo lema 2, segue que t é um número racional, digamos, $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$.

Daí,

$$\frac{a}{c} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$$

e

$$\frac{b}{c} = \frac{2pq}{q^2 + p^2} \quad .$$

Assim,

$$a(q^2 + p^2) = c(q^2 - p^2)$$

e

$$b(q^2 + p^2) = c(2qp).$$

De (IV), denotemos $l = q^2 + p^2$ e $m = c$ Dessa forma,

$$a \cdot l = m \cdot (q^2 - p^2) = m \cdot a' \Longrightarrow a' = q^2 - p^2$$

$$b \cdot l = m \cdot (2qp) = m \cdot b' \Longrightarrow b' = 2qp$$

$$c \cdot l = m \cdot c' \Longrightarrow c \cdot l = c \cdot c' \Longrightarrow c' = l \Longrightarrow c' = p^2 + q^2.$$

Portanto, o terno (a, b, c) é semelhante ao terno $(q^2 - p^2, 2qp, q^2 + p^2)$ e $\sqrt{2} - 1 < \frac{p}{q} < 1$.

<u>Mas todos os ternos Pitagóricos podem ser escritos dessa forma?</u>

Observemos o terno (9,12,15). Suponhamos que ele possa ser escrito da forma (II). Assim,

$$2qp = 12 \implies qp = 6 \Rightarrow q = 6 \; e \; p = 1 \text{ ou } q = 2 \; e \; p = 3$$

Supondo $q = 6$ e $p = 1$ temos $0 < \frac{1}{6} < 0{,}414 < \sqrt{2} - 1$. Dessa forma, não podemos considerar esse caso. Agora, supondo $q = 3$ e $p = 2$, obtemos

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{2}{3} < 1.$$

Assim, aplicando $\mathrm{q} = 3$ e $p = 2$ em (II). Segue então que

$$(3^2 - 2^2, 2 \cdot 3 \cdot 2,\ 3^2 + 2^2) = (5{,}12{,}13) \neq (9{,}12{,}15)$$

Porém, $(9{,}12{,}15)$ é semelhante a $(3{,}4{,}5)$ que cumpre (II). Portanto, $(9{,}12{,}15)$ não é da forma (II). Donde concluímos que nem todos os ternos pitagóricos são da forma (II). Logo, a recíproca do Método de Diofanto é falsa.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho foi exibido uma relação entre duas áreas da matemática a Teoria dos números e a Geometria. Compreendendo, assim, uma forma de investigar as propriedades inerentes dos números e caracterizá-las.

Além disso, foi mostrado como caracterizar a forma de todos os ternos pitagóricos existentes, através do Método de Diofanto. E também mostramos que não vale a recíproca utilizando um contra-exemplo.

REFERÊNCIAS

1. EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino H. Domingues.* Editora da UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2004.
2. ROTMAN. Joseph J. *Journey Into Mathematics*: An Introduction to Proofs. Mineola, New York. Dover, 2007.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus por nos permitir fazer tal trabalho e, em seguida, ao PET-MATEMÁTICA que nos forneceu o caminho para a pesquisa. Nessa perspectiva, agradecemos ao Tutor, Daniel Cordeiro de Morais Filho, e cada um dos integrantes desse PET. Além disso, agradecemos ao FNDE por financiar parcialmente o PET-MATEMÁTICA. Por fim, agradecemos a cada um dos professores que nos influenciam direta ou indiretamente na nossa formação acadêmica e humana.